13 Delovanje grupe na množici.

Definicija (delovanje grupe na množici)
Naj bo X poljubna množica in naj bo G neka grupa. Delovanje grupe G na množici X (z leve strani) je preslikava $G \times X \to X$ za katero velja:

(i) $ex = x$ za vsak $x \in X$,

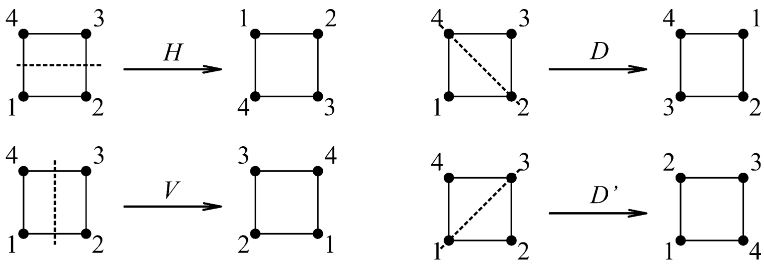
(ii) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ za vsak $x \in X$ in za vsaka $g_1, g_2 \in G$.

Pod temi pogoji množico X imenujemo G-množica. Upoštevajmo, da ne zahtevamo od množice X da bo v kakršni koli povezavi z grupom G.

1. Naj bo $G = GL_2(\mathbb{R})$ in naj bo $X = \mathbb{R}^2$. Pokaži da grupa G deluje na množici X v skladu z levim množenjem.

2. Naj bo $G = S_5$ in naj bo $X = \{\{i,j\} : i \neq j,\ i,j \in \{1,2,3,4,5\}\}$. Pokaži, da grupa G deluje na množici X v skladu z naslednjim predpisom: $G \times X \to X$, $\sigma\{i,j\} = \{\sigma i, \sigma j\}$.

3. Dan je kvadrat katerega ogljišča so označena s števi 1, 2, 3 in 4. Naj bo $D_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'\}$ diederska grupa reda 8, kje je R_α rotacija za kot α, medtem ko so H, V, D in D' zrcaljenja opisana s slikami desno. Obrazloži, na kakšen način elementi R_0, H in D' grupe D_4 delujejo na ogljiščih 1 in 3. Če je $X = \{1,2,3,4\}$ napiši grupo D_4 v obliki grupe permutacij množice X. Pokaži, da grupa D_4 deluje na množici X.



4. Dana je grupa G in naj bo $X = G$. Definirajmo preslikavo $G \times X \to X$ na naslednji način: $g * x = x^g = gxg^{-1}$ (tako definirana preslikava se imenuje konjugacija). Pokaži, da je konjugacija delovanje grupe.

5. Predpostavimo da grupa G deluje na množici X. (a) Pokaži, da če je $x \in X$, $g \in G$ in $y = gx$, potem je $x = g^{-1}y$. (b) Pokaži, da če je $x \neq x'$ potem $gx \neq gx'$.

Izrek. Naj bo X G-množica. Za vsak $g \in G$, je funkcija $\sigma_g : X \to X$ definirana z $\sigma_g(x) = gx$ za $x \in X$, permutacija množice X. Tudi, preslikava $\phi : G \to S_X$ definirana z $\phi(g) = \sigma_g$ je homomorfizem z lastnostjo, da je $\phi(g)(x) = gx$.

6. Dokaži izrek zgoraj.

Definicija (orbita elementa x pri delovanju grupe G)
Naj grupa G deluje na množici X in naj bo $x \in X$. Množici

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

pravimo orbita elementa x pri delovanju grupe G na množici X.

7. (a) Dana je grupa $G = \{(1), (123), (132), (45), (123)(45), (132)(45)\} \leq S_5$ in dana je množica $X = \{1,2,3,4,5\}$ (X je G-množica). Določi orbite množice X glede na grupo G.

(b) Poišči orbite delovanja podgrupe $H = \langle (13), (247) \rangle \leq S_8$ na množici $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

8. Naj bo $G \subseteq \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ grupa vseh obrnljivih matrik in naj bo $X = \mathbb{R}^2$ (G deluje na množici X). Določi orbite množice X glede na grupo G.

9. Naj bo G dana grupa in naj bo $X = G$. Grupa G deluje na množici X v skladu z levim množenjem. Določi orbite množice X glede na delovanje grupe G.

Definicija (stabilizator elementa x)
Naj grupa G deluje na množici X in naj bo $x \in X$. Množici

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

pravimo stabilizator elementa x v grupi G.

10. Naj bo X kvadrat in naj bo G grupa vseh simetrij kvadrata X ($G = \mathrm{Sym}(X)$). Opazimo, da G deluje na X. Določi orbito in stabilizator elementa $x \in X$ če je (a) x neko ogljišče kvadrata; (b) x sredina stranice kvadrata; (c) x točka na $\frac{1}{3}$ dolžine neke stranice kvadrata.

11. Naj bo G grupa realnih števil z opearcijo seštevanja. Naj bo delovanje elementa $\alpha \in G$ na množici $\mathbb{R}^2$ dano z rotacijo ravnine $\mathbb{R}^2$ okoli $(0,0)$ za α radianov v nasproti smeri urinega kazalca. Naj bo T poljubna točka v ravnini.

(a) Pokaži, da je $\mathbb{R}^2$ G-množica. (b) Geometrijsko opiši orbito, ki vsebuje točko T.

(c) Poišči stabilizator G_T.

Izrek. Naj bo X G-množica in naj bosta $x \in X$, $g \in G$ poljubna elementa. Potem je $G_{gx} = gG_xg^{-1}$. Še več, če je H neka neprazna množica, potem je $G_{gH} = gG_Hg^{-1}$.

12. Dokaži izrek zgoraj.

13. Naj bo $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $\sigma = (123)(456)(789)$, $\tau = (12)(34)(56)(78)$, $G = \langle \sigma, \tau \rangle$. Poglejmo si delovanje grupe G na množici X. Opazimo, da je $\tau \in G_9$ in da je $\tau \in G_{\{3,4\}}$. Kaj lahko brez neposrednoga računanja rečemo o $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

14. Dan je pravilni petkotnik čigaar oglišča so označena s števili 1, 2, 3, 4 in 5. Če sta $\rho = (13524)$ in $\mu = (25)(34)$, brez neposrednog računanja določi $\rho\mu\rho^{-1}$.

Izrek. Naj bo X G-množica in naj bosta $x \in X$, $g \in G$ poljubna elementa. Če je $gx = y$ in $T = \{t \in G \mid tx = y\}$, potem je $T = gG_x$.

15. Dokaži izrek zgoraj.

Izrek (orbita-stabilizator izrek)
Naj bo X G-množica in naj bo $x \in X$. Potem je $|Gx| = [G : G_x]$. Če je G končna, potem je $|Gx|$ deljitelj od $|G|$. Poleg tega

$$|G| = |Gx| \cdot |G_x|.$$

16. Dokaži izrek zgoraj.

17. (a) Naj bo X kocka in naj bo $G = \mathrm{RotSym}(X)$ grupa vseh rotacijskih simetrija kocke X. Določi red grupe G. (b) Naj bo X dodekaeder in naj bo $G = \mathrm{RotSym}(X)$ grupa vseh rotacijskih simetrija dodekaedra X. Določi red grupe G.

18. Naj bo $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $\sigma = (123)(456)(789)$, $\tau = (12)(34)(56)(78)$, $G = \langle \sigma, \tau \rangle$. Oglejmo si delovanje grupe G na množici X. (a) Kaj je orbita delovanja grupe G na elementu 2? na elementu 6? na elementu 8? (b) Izrazi $|G_1|$ preko $|G|$. (c) naj bo $Y = \{\{a,b\} \mid a, b \in X\}$. Ali G deluje na Y? Zakaj? Kako? Kaj lahko rečemo o orbitah? (d) Opazimo, da je $\tau \in G_9$ in da je $\tau \in G_{\{3,4\}}$. Kaj lahko brez neposrednog računanja rečemo o $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

19. Predpostavimo, da grupa G deluje na množici X. (a) Pokaži, da so različne orbite disjunktne. (b) Za poljuben element $x \in X$ pokaži, da je stabilizator G_x elementa x podgrupa grupe G.

20. (a) Naj bo G grupa reda 15, katera deluje na množici X reda 22. Predpostavimo, da množica X nima fiksnih točk. Določi število orbit. (b) Naj bo G grupa reda 75, katera deluje na množici X reda 11. Predpostavimo da množica X nima fiksnih točk. Določi število orbit.